

محاضرة رياضية ٣ ← Lec (10)

→ upper approximation of complex integration:-

التقريب العلوي للتكامل المركب :-

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x_r) \cdot \Delta x_r \rightarrow (1)$$

خطوة التقسيم على محور x بين الفترة $[a, b]$

منه معنى التكامل المحدد يمكن إيجاد قيمة تقريبية للحد

العلوي منه وذلك باستخدام الصورة (1) عند تحويل

لصورة مركبة .

$$\int_c f(z) dz = \lim_{\Delta z_r \rightarrow 0} \sum f(z_r) \Delta z_r$$

$$\left| \int_c f(z) dz \right| = \left| \lim_{\Delta z_r \rightarrow 0} \sum f(z_r) \Delta z_r \right|$$

$$\leq \lim_{\Delta z_r \rightarrow 0} \sum |f(z_r)| |\Delta z_r|$$

$$\leq \int_c |f(z)| |dz|$$

[1] Lec 10

→ يوجد قيمة M تكون أكبر قيمة للدالة على المنحنى c بالكامل

$$|f(z)| < M$$

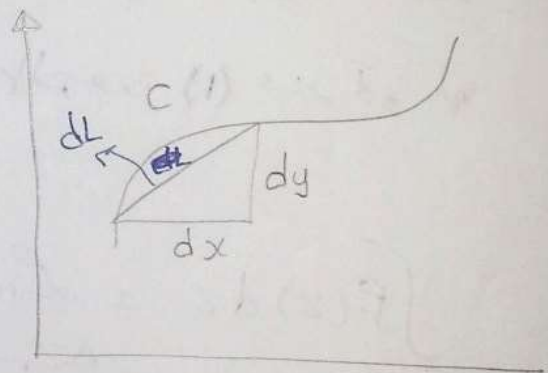
$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq M \int_c |dz|$$

$$z = x + iy$$

$$dz = dx + i dy, \quad |dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

→ عند ما تكون dx و dy صغيرة جداً

$$\therefore dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



$$\left| \int_z f(z) dz \right| \leq M L$$

→ L طول المنحنى

Example

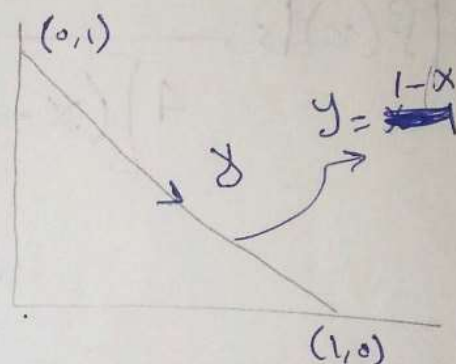
→ Let γ denote the line segment from $z=i$ to $z=1$. show that $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4} \right| \leq 4\sqrt{2}$

Solution

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4} \right| \leq ML$$

$$L(\gamma) = \sqrt{2}$$

$$|f(z)| \leq \left| \frac{1}{z^4} \right| = \frac{1}{|z^4|}$$



معادلة الخط
 $y = 1 - x$

$$|z^4| \leq |z|^4 = (\sqrt{x^2 + y^2})^4 = (x^2 + y^2)^2$$

من معادلة الخط

$$= [x^2 + (1-x)^2]^2 \leq [x^2 + 1 - 2x + x^2]^2$$

$$= 4 \left[x^2 - x + \frac{1}{2} \right]^2$$

* اكتمال مربع :-

(جذر الأول الإشارة $\frac{1}{2}$ معامل الثاني) - $\left(\frac{1}{2}\right)$ معامل الثاني + الباقي

$$|z^4| = 4 \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right]^2$$

$$= 4 \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right]^2$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{4 \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right]^2} \quad 0 \leq x \leq 1$$

أعلى قيمة للمقدار عند $x = \frac{1}{2}$

$$|f(z)| \leq 4$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq ML$$

$$\leq 4\sqrt{2}$$

Home work

show that $\left| \int_{\gamma} (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60$

where γ denote the boundary of triangle with vertices $z=0$, $z=-4$ and $z=3i$

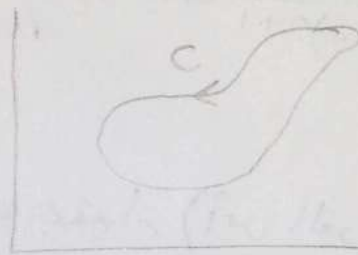
في هذا الجزء :-

سندرس قواعد التكامل التي تحسب بمجرد النظر دون خطوات

بسيطة وهذا يستوجب أن تكون الدالة analytic ومعروفة على منحنى مغلق .

[1] if $f(z)$ is analytic on simple closed curve (s.c.c) then

$$\oint_C f(z) dz = 0$$



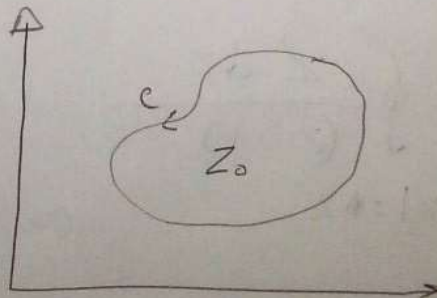
معنى (simple closed curve) أنه منحنى مغلق لا يقطع نفسه

والدالة ~~في~~ التكامل لا يوجد لها أي مفار الحقاير أو مقياس داخل

أو صرافه أي تحقق شروط analytic .

[2] if $f(z)$ is analytic on s.c.c then

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



- إذا كانت الدالة $f(z)$ لا يوجد لها أقطاب للمقام داخل
 المنحنى C ولا تقع على مقياس أو مراقب فإن التكامل يمكن
 حسابه بمجرد النظر ، فمثلاً فإن المقام $z - z_0$ تحت ونحوه
 به قوة ونظيره في $2\pi i$.

[3] If $f(z)$ is analytic on s.c.c then

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=z_0}$$

- لحساب التكامل نقابل الدالة بمقدار (أس القوس - 1)

ونحوه ونوفر المقام في ناتج التفاضل ونضرب الناتج في $\frac{2\pi i}{n!}$

Example Evaluate.

[1] $\oint_{|z|=1} \sin z \, dz$

[2] $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)}$

[3] $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z-1)}$

[4] $\oint_{|z|=5} \frac{e^z}{(z-2)^3} dz$

Solution

$$\boxed{1} \oint_{|z|=1} \sin z \, dz = 0$$

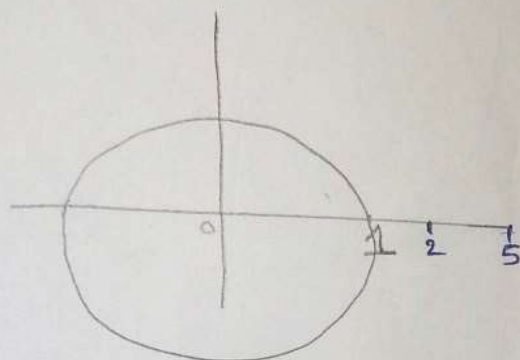
→ analytic

لا يوجد أقطار مقام

$$\boxed{2} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)}$$

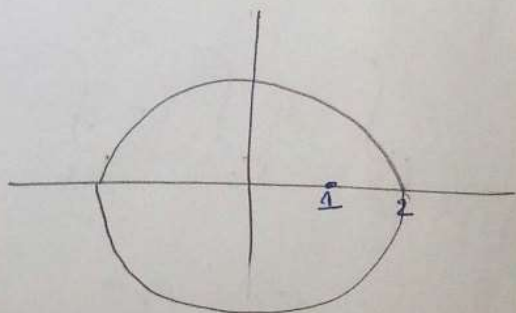
أقطار المقام $z=2$, $z=5$ لا تقع داخل المنحنى

$$\therefore \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)} = 0$$



$$\boxed{3} \oint_{|z|=2} \frac{z^2 dz}{(z-1)}$$

$$= 2\pi i (1)^2 = 2\pi i$$

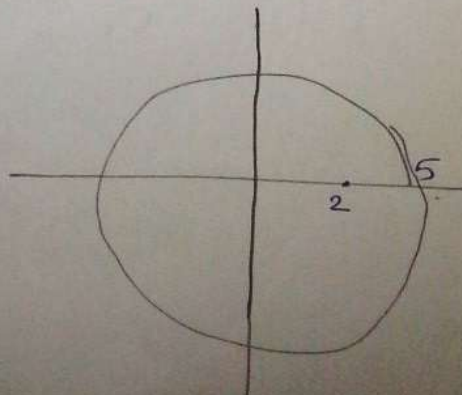


$\boxed{4}$

$z=2 \leftarrow$ نقل داخل الدائرة

$$I = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2 e^z}{dz^2} \right|_{z=2}$$

$$I = \pi i e^z$$



II إذا وجد أكثر من قوس في المقام ويقع أقطابهم داخل

التكامل نستخدم



$$\int_{L_1} + \int_{C_3} - \int_{L_1} - \int_C + \int_{L_2} + \int_{C_1} - \int_{L_2} +$$

$$\int_{L_3} + \int_{C_2} - \int_{L_3} = 0 \rightarrow \text{المسألة (analytic)}$$

$$\therefore \oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

- إذا وجد أكثر من هفر للمقام داخل المنحنى نضرب كل
 هفر منه أ هنتار المقام بالمنحنى مغلقة يحتوى ~~هفر~~ هفر المقام
 ولا يحتوى الباقي ونستخدم الهورة

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

- مع الحد الأول نجعل القوس الذي فيه $(z - z_0)$ لوحده
 في المقام ونجعل الباقي مقام البسط (كي نعرف تطبيع النظرية)
 - مع الحد الثاني نجعل القوس ~~الذي~~ ^{الذي يحتوى} $(z - z_0)$ في المقام
 ونجعل الباقي مقام البسط . وهكذا .

[2] قوسين في المقام واحد هفره يقع والثاني هفره لا يقع
 نجعل الذي هفره لا يقع مقام البسط .

Ex: Evaluate

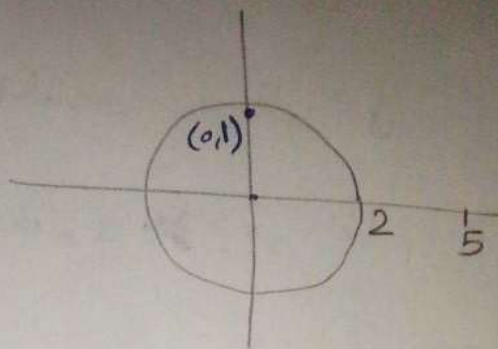
$$[1] \oint_{|z|=2} \frac{\sinh z}{(z-i)(z-5)} dz, [2] \oint_{|z|=5} \frac{\cosh z}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz$$

$$[3] \oint_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-1)^2(z-6)} dz$$

[1]

$Z=i$ ← تقع داخل المنحنى .

$Z=5$ ← لا تقع داخل المنحنى .

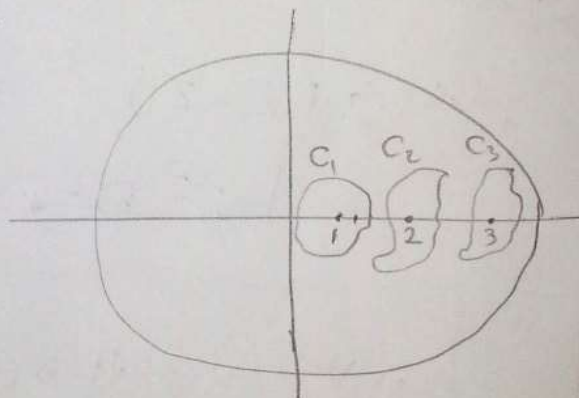


$$I = \oint \frac{\frac{\sinh z}{z-5}}{z-i} dz = 2\pi i \left(\frac{\sinh i}{i-5} \right)$$

$$= 2\pi i^2 \frac{\sinh i}{i-5} = \frac{-2\pi \sinh i}{i-5}$$

[2] $Z=1, Z=2, Z=3$ أقطار الحلقام
تقع داخل المنحنى

$$\oint_{C_3} + \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_2}$$



$$= \oint \frac{\cosh z}{(z-2)(z-3)} \frac{1}{z-1} + \oint \frac{\cosh z}{(z-1)(z-3)} \frac{1}{z-2} + \oint \frac{\cosh z}{(z-1)(z-2)} \frac{1}{z-3}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\cosh 1}{(-1)(-2)} \right) + 2\pi i \left(\frac{\cosh 2}{(1)(-1)} \right) + 2\pi i \left(\frac{\cosh 3}{(2)(1)} \right)$$

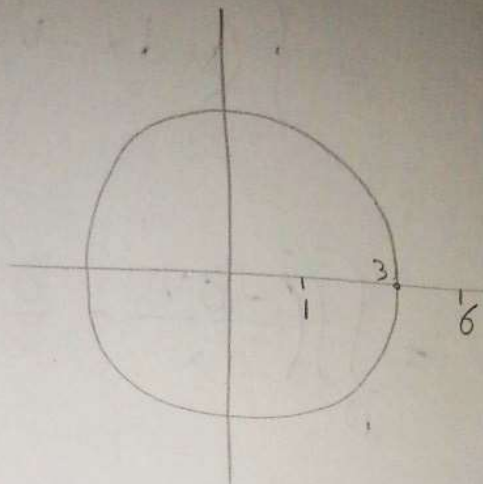
[3]

$z=1$ تقع داخل الدائرة

$$I = \oint_C \frac{z^2}{(z-6)} \frac{dz}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{2\pi i}{1!} \left. \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z-6)} \right|_{z=1}$$

$$= 2\pi i \left. \frac{(z-6)2z - z^2 \times 1}{(z-6)^2} \right|_{z=1} = 2\pi i \left[\frac{(-5)(2) - 1}{25} \right]$$



[Ex] show that if $f(z)$ is analytic on simple closed curve then $\oint_C f(z) dz = 0$

[Notes]

→ Green theorem

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Sol

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy)$$

[11] Lect 10

$$= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy)$$

$$= \iint_D \left(\frac{-\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

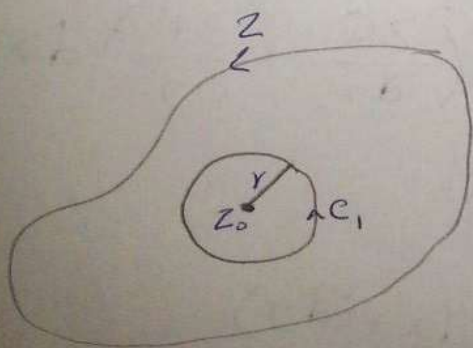
since $f(z)$ is analytic $u_x = v_y$ & $u_y = -v_x$

$$\therefore \oint_C f(z) dz = 0 \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Ex

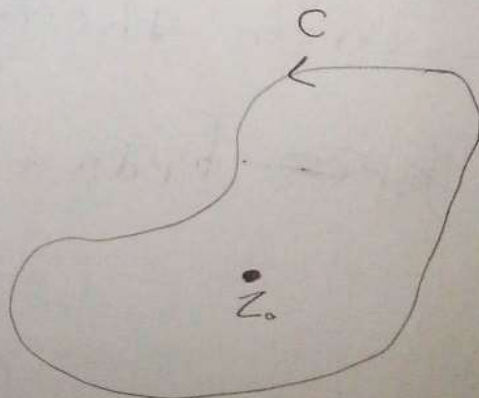
show that if $f(z)$ is analytic on s.c.c and z_0 inside C then

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$



Sol

\Leftrightarrow



منه نصفها Z_0 ونهفها r .

$$|z - z_0| = r$$

$$\oint = \oint_{\gamma}$$

$$I = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz$$

$$z - z_0 = r e^{i\theta}$$

$$dz = i r e^{i\theta} d\theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} i f(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

[13] Lec 10